

УДК 517.97

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ МЛАДШЕМ ЧЛЕНЕ В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Г.Ф.КУЛИЕВ\*, С.М. ЗЕЙНАЛЛЫ\*\*

*Бакинский Государственный Университет\***Гянджинский Государственный Университет\*\**

zeynallsubhiya@yahoo.com

В работе рассматривается задача определения коэффициента при младшем члене в уравнении колебаний струны и поиск неизвестного коэффициента приводится к задаче минимизации некоторого функционала, построенного с помощью дополнительного данного, получается градиент функционала, необходимое условие оптимальности и предлагается алгоритм для нахождения неизвестного коэффициента.

**Ключевые слова:** обратная задача, неизвестный коэффициент, необходимое условие.

Как известно, нахождение коэффициентов дифференциальных уравнений или коэффициентов краевых условий при дополнительных информациях являются обратными задачами. Такие задачи возникают в областях геофизики, сейсмологии, гидродинамики, медицины, астрономии и т.д. [1-5], поэтому исследование таких задач является актуальной задачей современной математики.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу: требуется определить пару функций  $u(x,t) \in W_{2,0}^1(Q_T)$ ,  $\mathbf{V}(x,t) \in L_\infty(Q_T)$  из системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathbf{V}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x_0,t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $Q_T = (0,l) \times (0,T)$  - прямоугольник,  $f \in L_2(Q_T)$ ,  $u_0 \in W_2^1(0,l)$ ,  $u_1 \in L_2(0,l)$ ,  $\varphi \in L_2(0,T)$  - заданные функции,  $x_0 \in (0,l)$  - заданная точка.

Отметим, что краевая задача (1)-(3) при каждой фиксированной  $\mathbf{V}(x, t) \in L_\infty(Q_T)$  имеет единственное обобщенное решение в  $W_{2,0}^1(Q_T)$  ([6], с.209-215) и оно обладает свойствами  $u \in C([0, T]; W_2^1(0, l))$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, T]; L_2(0, l))$  [7].

Эту задачу сводим к следующей задаче:  
найти минимум функционала

$$J(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \int_0^T [u(x_0, t; \mathbf{V}) - \varphi(t)]^2 dt, \quad (5)$$

при ограничениях (1)-(3), где  $u(x, t; \mathbf{V})$  - решение задачи (1)-(3) при  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, t)$ .

Если существует такая функция  $\mathbf{V} \in L_\infty(Q_T)$ , что

$$\min_{\mathbf{V} \in L_\infty(Q_T)} J(\mathbf{V}) = 0, \quad (6)$$

то дополнительное условие (4) выполняется.

## 2. О разрешимости задачи (1)-(3), (5)

Теперь рассмотрим задачу:

при каких условиях  $\inf_{\mathbf{V} \in L_\infty(Q_T)} J(\mathbf{V}) = 0$ ?

Этот вопрос эквивалентен вопросу о плотности в  $L_2(0, T)$  образа  $L_\infty(Q_T)$  при отображении

$$\mathbf{V} \rightarrow u(x_0, t; \mathbf{V}). \quad (7)$$

Для решения этого вопроса применим теорему Хана-Банаха ([8], с.194). Пусть  $\psi_0(t)$  - заданная функция из  $L_2(0, T)$ , такая, что

$$\int_0^T u(x_0, t; \mathbf{V}) \psi_0(t) dt = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in L_\infty(Q_T). \quad (8)$$

Мы хотим выяснить, будет ли отсюда следовать, что  $\psi_0(t) = 0$ .

Введем функцию  $W(x, t)$  - решение задачи

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \psi_0(t) \delta(x - x_0), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (9)$$

$$W(x, T) = 0, \quad \frac{\partial W(x, T)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (10)$$

$$W(0, t) = W(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11)$$

Эта задача имеет единственное обобщенное решение в  $W_{2,0}^1(Q_T)$  и оно обладает свойствами  $W \in C([0, T]; W_2^1(0, l))$ ,  $\frac{\partial W}{\partial t} \in C([0, T]; L_2(0, l))$  ([9]).

В силу определения обобщенного решения задачи (1)-(3) имеем: при  $t = 0$  выполняется условие  $u(x, 0) = u_0(x)$  и интегральное тождество

$$\int_0^l \frac{\partial u(x,T;\mathbf{V})}{\partial t} \eta(x,T) dx - \int_0^l u_1(x) \eta(x,0) dx + \int_{Q_T} \left( -\frac{\partial u(x,t;\mathbf{V})}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t;\mathbf{V})}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathbf{V}u(x,t;\mathbf{V}) \eta - f\eta \right) dx dt = 0, \quad \forall \eta \in W_{2,0}^1(Q_T). \quad (12)$$

А в силу определения обобщенного решения задачи (9)-(11) имеем: при  $t = T$  выполняется условие  $W(x,T) = 0$  и интегральное тождество

$$-\int_0^l \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} g(x,0) dx + \int_{Q_T} \left( -\frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dt - \int_0^T \psi_0(t) g(x_0,t) dt = 0, \quad \forall g \in W_{2,0}^1(Q_T). \quad (13)$$

Теперь в (12) за функцию  $\eta$  возьмем  $W$ , а в (13) за функцию  $g$  возьмем  $u$ , из (12) вычтем (13), тогда имеем

$$-\int_0^l u_1(x) W(x,0) dx + \int_0^l \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} u_0(x) dx + \int_{Q_T} (\mathbf{V}u(x,t;\mathbf{V}) - f) W dx dt + \int_0^T \psi_0(t) u(x_0,t;\mathbf{V}) dt = 0, \quad \forall \mathbf{V} \in L_\infty(Q_T).$$

Тогда, в силу условия (8), получим

$$\int_{Q_T} (\mathbf{V}u(x,t;\mathbf{V}) - f) W dx dt - \int_0^l \left[ u_1(x) W(x,0) - u_0(x) \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} \right] dx = 0, \quad \forall \mathbf{V} \in L_\infty(Q_T).$$

Отсюда следует, что

$$\int_{Q_T} (\mathbf{V}_1 u(x,t;\mathbf{V}_1) - \mathbf{V}_2 u(x,t;\mathbf{V}_2)) W dx dt = 0, \quad \forall \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in L_\infty(Q_T).$$

Пусть когда  $\mathbf{V}_1(x,t), \mathbf{V}_2(x,t)$  независимо друг от друга пробегают в  $L_\infty(Q_T)$ ,  $\mathbf{V}_1 u(x,t;\mathbf{V}_1) - \mathbf{V}_2 u(x,t;\mathbf{V}_2)$  заполняет всюду плотное множество в  $L_2(Q_T)$ . Тогда  $W(x,t) = 0$  почти всюду в  $Q_T$ . Поскольку  $W(x,t)$  непрерывна на  $[0,l] \times [0,T]$  [см.9], то  $W(x,t) \equiv 0$ ,  $(x,t) \in Q_T$ , поэтому из (9) следует, что  $\psi_0(t) = 0$ .

Таким образом, мы получаем, что

$$\inf_{\mathbf{V} \in L_\infty(Q_T)} J(\mathbf{V}) = 0.$$

Если образ  $L_\infty(Q_T)$  при отображении (7) замкнут в  $L_2(0,T)$ , то возможно существует такой элемент  $\mathbf{V}_0 \in L_\infty(Q_T)$ , что

$$\min_{\mathbf{V} \in L_\infty(Q_T)} J(\mathbf{V}) = J(\mathbf{V}_0) = 0.$$

### 3. Вычисление дифференциала функционала (5) и необходимое условие оптимальности

Покажем, что функционал (5) дифференцируем в  $L_\infty(Q_T)$ .

Берем две допустимые функции  $\mathbf{V}, \mathbf{V} + \delta \mathbf{V} \in L_\infty(Q_T)$ . Обозначим

$$\delta u(x, t) = u(x, t; \mathbf{V} + \delta \mathbf{V}) - u(x, t; \mathbf{V}).$$

Ясно, что  $\delta u(x, t)$  является обобщенным решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + (\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}) \delta u = -u(x, t; \mathbf{V}) \delta \mathbf{V}, \quad (14)$$

$$\delta u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \delta u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

$$\delta u(0, t) = 0, \quad \delta u(l, t) = 0, \quad (16)$$

т.е. обобщенное решение из  $W_{2,0}^1(Q_T)$  задачи (14)-(16) равно нулю при  $t = 0$  и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left[ -\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + (\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}) \delta u \eta + u(x, t; \mathbf{V}) \delta \mathbf{V} \eta \right] dx dt = 0 \quad (17)$$

при всех  $\eta = \eta(x, t) \in W_{2,0}^1(Q_T)$ , равной нулю при  $t = T$ .

Пусть  $\psi = \psi(x, t; \mathbf{V})$  - обобщенное решение из  $W_{2,0}^1(Q_T)$  сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mathbf{V} \psi = -\delta(x - x_0)[u(x_0, t; \mathbf{V}) - \varphi(t)], \quad (x, t) \in Q_T, \quad (18)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (19)$$

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (20)$$

т.е. обобщенное решение из  $W_{2,0}^1(Q_T)$  задачи (18)-(20) равно нулю при  $t = T$  и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} - \mathbf{V} \psi g \right] dx dt - \int_0^T [u(x_0, t; \mathbf{V}) - \varphi(t)] g(x_0, t) dt = 0 \quad (21)$$

при всех  $g = g(x, t) \in W_{2,0}^1(Q_T)$ , равной нулю при  $t = 0$ .

Если в (17) положим  $\eta = \psi(x, t; \mathbf{V})$ , а в (21) положим  $g = \delta u(x, t)$  и сложим полученные соотношения, то имеем

$$\int_0^T [u(x_0, t; \mathbf{V}) - \varphi(t)] \delta u(x_0, t) dt = \int_{Q_T} (u(x, t; \mathbf{V}) + \delta u) \psi \delta \mathbf{V} dx dt. \quad (22)$$

Теперь вычислим приращение функционала (5).

$$\begin{aligned} \Delta J(\mathbf{V}) &= J(\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}) - J(\mathbf{V}) = \int_0^T [u(x_0, t; \mathbf{V}) - \varphi(t)] \delta u(x_0, t) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T |\delta u(x_0, t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая равенство (22) в (23), для приращения функционала получим

выражение

$$\Delta J(\mathbf{V}) = \int_{Q_T} u(x, t; \mathbf{V}) \psi \delta \mathbf{V} dx dt + R, \quad (24)$$

где

$$R = \frac{1}{2} \int_0^T |\delta u(x_0, t)|^2 dt + \int_{Q_T} \psi \delta u \delta \mathbf{V} dx dt.$$

В формуле приращения (24) функционала первое слагаемое определяет линейный ограниченный функционал от  $\delta \mathbf{V}$  на  $L_\infty(Q_T)$ .

Линейность по  $\delta \mathbf{V}$  очевидна. В силу теоремы из [10, с.153], вложение  $W_{2,0}^1(Q_T) \subset L_2(Q_T)$  ограничено, поэтому, применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\left| \int_{Q_T} u \psi \delta \mathbf{V} dx dt \right| \leq \|u\|_{2, Q_T} \cdot \|\psi\|_{2, Q_T} \cdot \|\delta \mathbf{V}\|_{\infty, Q_T} \leq M_1 \|u\|_{2, Q_T}^{(1)} \cdot \|\psi\|_{2, Q_T} \cdot \|\delta \mathbf{V}\|_{\infty, Q_T},$$

отсюда следует, что функционал  $\int_{Q_T} u \psi \delta \mathbf{V} dx dt$  ограничен по  $\delta \mathbf{V}$  на  $L_\infty(Q_T)$ ,

здесь и в дальнейшем через  $M_i$  будем обозначать постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и от допустимых функций  $\mathbf{V}(x, t)$ .

Теперь оценим остаточный член  $R$ , входящий в (24). В силу ограниченности вложения  $W_{2,0}^1(Q_T) \subset L_2(0, T)$  [6, с.70] получим

$$\|\delta u(x_0, t)\|_{L_2(0, T)} \leq M_2 \|\delta u\|_{2, Q_T}^{(1)}. \quad (25)$$

Из результатов работы [6, с.209-215] следует, что при принятых выше условиях для решения краевой задачи (14)-(16) справедлива оценка

$$\|\delta u\|_{2, Q_T}^{(1)} \leq M_3 \left[ \|u_0\|_{2, \Omega}^{(1)} + \|u_1\|_{2, \Omega} + \|f\|_{2, Q_T} \right] \|\delta \mathbf{V}\|_{\infty, Q_T}. \quad (26)$$

А для решения сопряженной краевой задачи (18)-(20) справедлива оценка ([7, с.320-324])

$$\|\psi\|_{2, Q_T} \leq M_4 \|u(x_0, t) - \varphi(t)\|_{L_2(0, T)} \leq \|u_0\|_{2, \Omega}^{(1)} + \|u_1\|_{2, \Omega} + \|f\|_{2, Q_T} + \|\varphi\|_{L_2(0, T)}. \quad (27)$$

По неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_T} \psi \delta u \delta \mathbf{V} dx dt \right| &\leq \|\psi\|_{2, Q_T} \cdot \|\delta u\|_{2, Q_T} \cdot \|\delta \mathbf{V}\|_{\infty, Q_T} \leq \\ &\leq M_6 \|\psi\|_{2, Q_T} \cdot \|\delta u\|_{2, Q_T}^{(1)} \cdot \|\delta \mathbf{V}\|_{\infty, Q_T}. \end{aligned}$$

Если в последнем неравенстве учесть оценку (26) и (27) получим

$$\left| \int_{Q_T} \psi \delta u \delta \mathbf{V} dx dt \right| \leq M_7 \left[ \|u_0\|_{2, \Omega}^{(1)} + \|u_1\|_{2, \Omega} + \|f\|_{2, Q_T} + \|\varphi\|_{L_2(0, T)} \right]^2 \|\delta \mathbf{V}\|_{\infty, Q_T}^2. \quad (28)$$

Если в (25) учесть оценку (26) имеем

$$\|\delta u(x_0, t)\|_{L_2(0, T)}^2 \leq M_8 \left[ \|u_0\|_{2, \Omega}^{(1)} + \|u_1\|_{2, \Omega} + \|f\|_{2, Q_T} \right]^2 \|\delta \mathbf{V}\|_{\infty, Q_T}^2. \quad (29)$$

Таким образом, из (28) и (29) следует, что

$$|R| \leq \frac{1}{2} \int_0^T |\delta u(x_0, t)|^2 dt + \left| \int_{Q_T} \psi \delta u \delta \mathbf{V} dx dt \right| \leq M_9 \|\delta \mathbf{V}\|_{\infty, Q_T}^2.$$

Тогда из (24) следует, что функционал (5) дифференцируем по Фреше на  $L_\infty(Q_T)$  и справедлива формула

$$dJ(\mathbf{V}) = \langle J'(\mathbf{V}), \delta \mathbf{V} \rangle = \int_{Q_T} u \psi \delta \mathbf{V} dx dt. \quad (30)$$

**Теорема.** Пусть выполнены выше наложенные условия на данные задачи (1)-(4). Тогда для оптимальности  $\mathbf{V}_* = \mathbf{V}_*(x, t) \in L_\infty(Q_T)$  в задаче (1)-(3), (5) необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$u_*(x, t) \psi_*(x, t) = 0 \quad (31)$$

почти для всех  $(x, t) \in Q_T$ , где  $u_*(x, t) = u(x, t; \mathbf{V}_*)$ ,  $\psi_*(x, t) = \psi(x, t; \mathbf{V}_*)$  - решения задач (1)-(3) и (18)-(20) соответственно.

**Доказательство.** Согласно выше доказанным утверждениям, функционал  $J(\mathbf{V})$  непрерывно дифференцируем по Фреше на  $L_\infty(Q_T)$  и его дифференциал в точке  $\mathbf{V} \in L_\infty(Q_T)$  определяется равенством (30). В силу теоремы 4 из [11, с.27] на элементе  $\mathbf{V}_*(x, t) \in L_\infty(Q_T)$  необходимо выполнение равенства  $J'(\mathbf{V}_*) = 0$ . Отсюда и из (30) следует справедливость равенства (31). Теорема доказана.

Из соотношения (30) следует, что градиент функционала (5) в точке  $\mathbf{V}(x, t)$  имеет вид

$$J'(\mathbf{V}) = u(x, t; \mathbf{V}) \psi(x, t; \mathbf{V}). \quad (32)$$

Таким образом, для получения градиента в точке  $\mathbf{V}(x, t) \in L_\infty(Q_T)$  нужно последовательно решить две краевые задачи: задачу (1)-(3) и задачу (18)-(20), а затем воспользоваться формулой (32). Для численного решения задачи (5), (1)-(3) могут быть использованы различные методы минимизации.

Градиентный метод для задачи (5), (1)-(3) с учетом формулы (32) сведется к построению последовательности  $\{\mathbf{V}_k(x, t)\}$  по правилу

$$\mathbf{V}_{k+1}(x, t) = \mathbf{V}_k(x, t) - \alpha_k u_k(x, t) \psi_k(x, t),$$

где параметр  $\alpha_k$  выбирается одним из способов, описанных в §4, п.1 из [11], а  $u_k(x, t)$  и  $\psi_k(x, t)$  при  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_k(x, t)$  являются решениями задач (1)-(3) и (18)-(20), соответственно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972, 164 с.

2. Кожанов А.И., Валитов И.Р. О разрешимости некоторых гиперболических обратных задач с двумя неизвестными коэффициентами // Мат. заметки ЯГУ, 14 (2007), с.3-16.
3. Anikonov Yu. E. Ayupova N.B. Table of Solutions and Coefficient for Second-Order Differential Equations and Inverse Problems // Journal of Inverse and ILL – Posed Problems, 15 (2007), p.867-892.
4. Abasheeva N.L. Identification of a Source in Parabolic and Hyperbolic Equations With a Parameter // Journal of Inverse and ILL – Posed Problems, 11 (2003), p.439-473.
5. Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // Труды Института Математики и Механики УрО РАН, т.18, №1, (2012), с.147-164.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 372 с.
8. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970, 336 с.
9. Кулиев Г.Ф. Задача точечного управления для гиперболического уравнения // Автоматика и телемеханика 1993, №3, с.80-85.
10. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424 с.
11. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

## SİMİN RƏQSLƏRİ TƏNLİYİNDƏ KİÇİK HƏDDİN ƏMSALININ TAPILMASI HAQQINDA

H.F.QULIYEV, S.M.ZEYNALLI

### XÜLASƏ

İşdə simin rəqsləri tənliyində kiçik həddin əmsalının tapılması məsələsinə baxılır, naməlum əmsalın axtarılması əlavə verilənin köməyilə qurulmuş müəyyən funksionalın minimalaşdırılması məsələsinə gətirilir, bu funksionalın qradienti hesablanır, optimallığın zəruri şərti alınır və naməlum əmsalın tapılması üçün alqoritm təklif olunur.

**Açar sözlər:** tərs məsələ, naməlum əmsal, zəruri şərt.

## ON A DEFINITION OF THE COEFFICIENT OF THE SMALL TERM IN THE STRING VIBRATION EQUATION

H.F.GULIYEV, S.M.ZEYNALLI

### SUMMARY

In the work, the problem of the definition of the coefficient of the small term is considered in the string vibration equation. The problem is reduced to the minimization of some functional constructed with the help of the additional condition, the gradient of this functional is calculated, the necessary optimality condition is derived and an algorithm is proposed to find the unknown coefficient.

**Key words:** inverse problem, unknown coefficient, necessary condition.

*Поступила в редакцию: 23.10.2014 г.*

*Подписано к печати: 26.11.2014 г.*